Teoria przestrzeni Hilberta
Lista 2 (pojęcie bazy i rzutu ortogonalnego)

Zad 1 (Uogólniona tożsamość równoległoboku). Pokazać, że jeżeli x, $y \in H$ są wektorami zespolonej przestrzeni unitarnej H oraz $\alpha \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia N, to

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \|x + \alpha^k y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Zad 2 (Uogólnione twierdzenie Pitagorasa). Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ortogonalnym układem wektorów w przestrzeni Hilberta H. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Ponadto, jeśli $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, to

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Zad 3. Sprawdzić, że funkcje trygonometryczne

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$$

tworzą układ ortonormalnym w rzeczywistej przestrzeni Hilberta $L_2[-\pi, \pi]$ (w rzeczywistości jest to baza tej przestrzeni). Wyznaczyć współczynniki Fouriera w tej bazie następujących funkcji

a) $x(t) = t$, b) $x(t) = t^2$, c) $x(t) = |t|$,

i wypisz dla nich tożsamości Parsevala.

Zad 4. Korzystając z pojęcia bazy wykazać twierdzenie Riesza o reprezentacji funkcjonału ograniczonego na przestrzeni Hilberta H.

Zad 5. Niech M będzie podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H rozpiętą przez liniowo-niezależne wektory $y_1, y_2, ..., y_n$. Pokazać, że rzut ortogonalny wektora x na M jest dany formułą

$$P_M x = -\frac{1}{g(y_1, ..., y_n)} \det \begin{pmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle & ... & \langle y_1, y_n\rangle & \langle y_1, x\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle y_n, y_1\rangle & \langle y_n, y_2\rangle & ... & \langle y_n, y_n\rangle & \langle y_n, x\rangle \\ y_1 & y_2 & ... & y_n & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $g(y_1, ..., y_n)$ jest wyznacznikiem *macierzy Grama* $G = [\langle y_i, y_j\rangle]_{i,j=1}^{n}$ układu $y_1, y_2, ..., y_n$. Natomiast odległość x od M wyraża się wzorem

$$d(x, M) = \left(\frac{g(y_1, ..., y_n, x)}{g(y_1, ..., y_n)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zad 6. Pokazać, że rzut ortogonalny na domkniętą podprzestrzeń M przestrzeni Hilberta H jest ograniczonym operatorem liniowym. Obliczyć jego normę.

Zad 7. Niech K, M będą podzbiorami przestrzeni Hilberta H. Pokazać, że

$$(K \cup M)^{\perp} = M^{\perp} \cap K^{\perp}, \qquad K \subset M \Longrightarrow M^{\perp} \subset K^{\perp}, \qquad M^{\perp} \cap M \subset \{0\}$$

$$< M >^{\perp} = M^{\perp}, \qquad M^{\perp} = < M^{\perp} >, \qquad < M > = (M^{\perp})^{\perp},$$

gdzie $M^{\perp} = \{x \in H : x \perp y \text{ dla każdego } y \in M\}$, a $< M >$ oznacza podprzestrzeń domkniętą generowaną przez M.